# 1 Практика 3

## 1.1 3. Требования к марковской матрице переходных вероятностей.

Последовательность случайных величин $\{X_n\}, n \geq 0$ со значениями в некотором не более чем счетном множестве S(множестве состояний) называется (однородной) марковской цепью, если для любых значений $k_i \in S$ выполнено соотношение

$$P(X_{n+1} = k|X_0 = k_0, ..., X_n = k_n) = P(X_{n+1} = k|X_n = k_n) = P(X_1 = k|X_0 = k_n) \tag{1}$$

(будущее зависит от прошлого через настоящее).

Пример. Пусть $X_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, где $\{\xi_n\}$ - последовательность независимых бернуллиевских с.в. Тогда $\{X_n\}$ - марковская цепь. Действительно,

$$P(X_{n+1} = k|X_0 = k_0, ..., X_n = k_n) = P(X_{n+1} - X_n = k - k_n|X_0 = k_0, .., X_n = k_n) = P(X_{n+1} - X_n = k - k_n) = \\ = P(\xi_i = k - k_n) = P(X_1 = k|X_0 = k_n) \tag{2}$$

Величина $p_{ik} = P(X_1 = k|X_0 = i)$ называется переходной вероятностью. Ее можно интерпретировать как вероятность перехода цепи из состояния i в состояние k за единицу времени. Матрица P: $(P)_{ik} = p_{ik}$ называется матрицей перехода

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{k1} & p_{k2} & \cdots & p_{kk} \end{pmatrix}$$

**Основные требования к матрице перехода**:

1) Так как матрица образует полную группу, то очевидно, сумма вероятностей этих событий равна единице.

$$\sum_{k \in S} p_{ik} = 1$$

2) Как было сказано ранее, матрица состоит из условных вероятностей, следовательно $0 \leq p_{ik} \leq 1$
3) Условные вероятности зависят только от состояний i и k.
4) Сумма элементов в любой строке должна равняться 1.

Простейшим примером такой матрицы служит:

$$\begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

где $0 \leq \alpha \leq 1, 0 \leq \beta \leq 1$. В частности, при $\alpha = \beta = 0$ получаем единичную матрицу.